

Điều khiển tối ưu cho hệ Pendubot 3-link

Optimal control for 3-linked Pendubot

Nguyễn Phương Hiếu¹, Lê Hùng Hiếu¹, Đặng Thái Bảo¹, Trần Thế Anh,¹

Lê Thị Thanh Hoàng¹, Lê Thị Hồng Lam¹, Nguyễn Văn Đông Hải^{1,*},

Nguyễn Minh Tâm¹, Nguyễn Trần Minh Nguyệt¹

¹ Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh

Số 1, Võ Văn Ngân, Phường Linh Chiểu, Quận Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh.

Thông tin chung

Ngày nhận bài:

06/05/2020

Ngày nhận kết quả phân biện:

29/05/2020

Ngày chấp nhận đăng:

11/06/2020

Từ khóa:

Điều khiển LQR, pendubot 3 link, hệ thống under-actuated, hệ thống SIMO

Keywords:

LQR control, three-linked pendubot, under-actuated system, SIMO system

Tóm tắt

Hệ pendubot là một hệ thống under-actuated SIMO cổ điển được sử dụng nhiều trong các phòng thí nghiệm với mục đích tìm hiểu và nghiên cứu học thuật điều khiển. Đa phần các nghiên cứu về hệ pendubot đều chỉ đề cập đến pendubot 2-link (hệ bậc thấp). Nếu nâng cấp số link sẽ làm tăng độ phức tạp của hệ thống cần điều khiển (hệ bậc cao). Điều khiển LQR là một giải thuật điều khiển tuyến tính được chứng minh tính ổn định bằng toán học. Trong bài báo này, tác giả sử dụng phương pháp điều khiển LQR để điều khiển hệ thống pendubot 3-link mô phỏng cân bằng tại vị trí làm việc tĩnh. Mô phỏng trên Matlab/Simulink cho thấy sự thành công của phương pháp điều khiển LQR trên mô hình pendubot 3-link. Kết quả điều khiển trong bài báo này có thể được áp dụng để các nghiên cứu trên các hệ under-actuated bậc cao có thể tham khảo.

Abstract

Pendubot is a classical SIMO under-actuated system that has been much used in laboratories for studying and researching control algorithms. Most studies on the pendubot only mention the two-linked pendubot (low-order system). If the number of links is upgraded, the difficulty of the controlled system will increase (high-order system). LQR control is a linear control algorithm whose stability is proved by mathematics. In this paper, the LQR control method was used to control the three-linked pendubot system for the balanced stimulation at an equilibrium point. Simulation on Matlab/Simulink showed the success of the LQR control method on the three-linked pendubot model. The controlling results in this paper could be applied for references in other studies on high-order under-actuated systems.

1. GIỚI THIỆU

Hệ pendubot là một hệ thống thông dụng trong lĩnh vực điều khiển [1]. Đây là một hệ thống có kết cấu đơn giản nhưng có đặc tính của một hệ phi tuyến SIMO điển hình. Rất nhiều giải thuật điều khiển đã

được áp dụng cho pendubot 2-link [2]-[4]. Tuy nhiên, các công trình về tăng số link để nâng cao độ phức tạp trong điều khiển của pendubot chưa có nhiều. Việc thực hiện các giải thuật trên các robot nhiều link hỗ trợ việc nghiên cứu hàn lâm về lý thuyết điều khiển cũng như hỗ trợ việc đào tạo

* tác giả liên hệ, email: hainvd@hcmute.edu.vn, 034 9672 108

sinh viên/ học viên ở các trường đại học về lý thuyết điều khiển tự động. Từ đó, các sinh viên có thể áp dụng kiến thức cho các đối tượng cụ thể, các quá trình tự động trong sản xuất thực tế. Ở tài liệu [5], tác giả Vũ Đình Đạt đã phân tích phương trình động học của hệ pendubot 3-link và cho thấy phương trình động học của hệ pendubot 3-link này rất phức tạp. Trong nghiên cứu trên, một giải thuật trượt được đề nghị để điều khiển hệ pendubot 3-link. Tuy nhiên, bộ điều khiển trượt này khá phức tạp. Khi hệ SIMO bậc cao hơn, việc tính toán ra tín hiệu điều khiển thông qua hàm phi tuyến chưa được đơn giản hóa không còn đơn giản nữa, cấu trúc điều khiển cũng phức tạp, khó xây dựng. Bộ điều khiển LQR có cấu trúc đơn giản, lại được đảm bảo ổn định bởi toán học nên có xu hướng dễ thực hiện và dễ áp dụng cho vi xử lý trong điều khiển mô hình thực.

Trong lĩnh vực điều khiển học, các bộ điều khiển rất đa dạng và mỗi bộ điều khiển sẽ được thiết kế phù hợp với mục đích điều khiển. Trước tiên, trong các bộ điều khiển tuyến tính thì bộ điều khiển PID kinh điển [6] được sử dụng rất rộng rãi vì sự đơn giản trong cấu trúc và đem lại hiệu quả cao. Tuy nhiên, việc xác định các thông số bộ điều khiển PID phải thông qua quá trình thử sai để tìm ra bộ thông số thích hợp. Mặt khác, bộ điều khiển PID được thiết kế phù hợp cho 1 hệ SISO (một vào-một ra) và không thích hợp cho một hệ có số ngõ vào khác với số ngõ ra. Sự ổn định của bộ điều khiển PID cũng không được đảm bảo về mặt toán học. Do đó, bộ điều khiển LQR là một phương án phù hợp cho hệ pendubot nhiều link vì áp dụng được cho các hệ có số tín hiệu vào ra tùy ý, miễn sao hệ thống đó mang tính chất “điều khiển được”. Bên cạnh đó, giải thuật LQR [7] cũng là một bộ điều khiển tuyến

tính nhưng tín hiệu điều khiển của bộ điều khiển này được tính toán bằng các công thức toán học được chứng minh tính ổn định dựa trên việc giải phương trình Ricatti. Dù vậy, giải thuật LQR theo lý thuyết chỉ ổn định tốt nếu hệ thống rất sát điểm làm việc tĩnh. Việc chọn thông số bộ điều khiển tốt có thể ổn định được hệ thống dù trạng thái đầu hệ thống có thể xa điểm làm việc tĩnh. Việc tối ưu hóa bộ điều khiển LQR sẽ được trình bày trong một vấn đề ở bài báo khác hoặc được nâng cấp về sau từ bài báo này.

Trong bài báo này, nhóm tác giả áp dụng giải thuật LQR cho hệ pendubot 3-link để kiểm chứng sự ổn định của bộ điều khiển tuyến tính LQR khi áp dụng cho hệ SIMO bậc cao. Hệ thống sẽ được tuyến tính xung quanh điểm làm việc tĩnh và bộ điều khiển LQR cũng sẽ được thiết kế dựa theo phương trình tuyến tính của hệ thống đã tìm được. Hơn thế nữa, giải thuật còn được kiểm chứng khi hệ thống có tác động của nhiễu bên ngoài.

Ở phần đầu bài báo, nhóm tác giả giới thiệu vấn đề và dẫn giải tới hướng đi mà bài báo hướng tới. Nội dung nghiên cứu của bài báo gồm 5 phần. Trong phần nội dung nghiên cứu, phương trình động học được giới thiệu và diễn giải. Trong phần 2, giải thuật điều khiển LQR đề nghị. Kết quả mô phỏng được thể hiện ở phần 3. Kết luận của bài báo được trình bày ở phần 5. Ở phần 5, các tài liệu tham khảo được liệt kê.

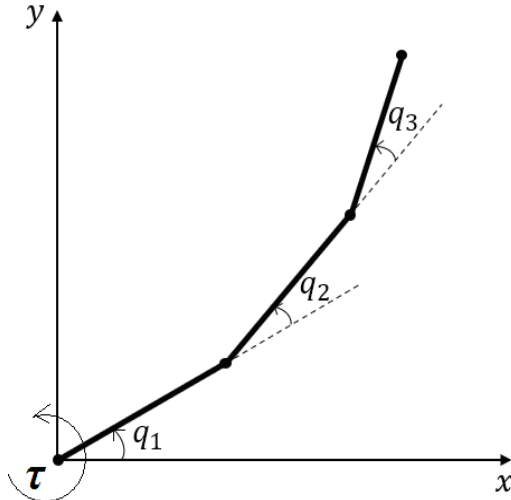
2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu giải thuật LQR điều khiển cho hệ con lắc ngược nhiều link. Trong trường hợp này, hệ thống pendubot 3-link được sử dụng trên mô phỏng thông qua giải thuật tuyến tính LQR. Khả năng điều khiển của bộ điều khiển LQR được kiểm

chứng đạt yêu cầu thông qua mô phỏng trên Matlab/ Simulink.

2.1. Phương trình động học

Theo tài liệu [5], cấu trúc mô hình của pendubot được biểu diễn trong không gian 2 chiều ở Hình 1.



Hình 1. Cấu trúc mô hình của hệ thống pendubot 3-link

Bảng 1. Thông số hệ thống [5]

Ký hiệu	Giá trị	Đơn vị	Mô tả
m_1	0,15	kg	Khối lượng link 1
l_1	0,2	m	Chiều dài link 1
l_{c1}	0,1	m	Khoảng cách từ khớp chủ động đến trọng tâm link 1
m_2	0,14	kg	Khối lượng link 2

l_2	0,2	m	Chiều dài link 2
l_{c2}	0,1	m	Khoảng cách từ khớp bị động đến trọng tâm link 2
m_3	0,055	kg	Khối lượng link 2
l_3	0,22	m	Chiều dài link 2
l_{c3}	0,11	m	Khoảng cách từ khớp bị động đến trọng tâm link 2
K_t	0,010	Nm/A	Hằng số momen của động cơ
K_b	0,065	V/(rad/s)	Hằng số phản điện của động cơ

Các phương trình toán học được sử dụng trong khâu điều khiển đều được liệt kê ở hệ phương trình (1). Trong đó, momen τ là tín hiệu tạo ra do động cơ để tác động vào hệ thống. Thông số hệ thống được liệt kê ở Bảng 1.

Mô hình toán học của pendubot 3 link có thể được diễn giải thông qua phương pháp Euler-Lagrange như sau:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_k} L(q, \dot{q}) = \tau \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Trong đó, toán tử Lagrange là:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2)$$

Với T là động năng hệ thống, V là thế năng hệ thống, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ là các góc lệch lần lượt của link 1, 2, 3 theo như Hình 1. Trong đó, T và V được tính toán như sau:

$$V(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^3 m_i g \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos q_j + l_{ci} \cos q_i \right) \quad (3)$$

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} m_k l_k^2 \dot{q}_i^2 + \sum_{j=1, j>1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} m_k l_i \dot{q}_i \dot{q}_j \cos(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{k-1} m_k l_{ck} l_j \dot{q}_j \dot{q}_k \cos(q_i - q_j) + \frac{1}{2} m_k a_k^2 l_k^2 \dot{q}_k^2 + \frac{1}{2} J_k \dot{q}_k \right] \quad (4)$$

Các phương trình ở chuỗi ở phương trình số (1) có thể viết về dạng ma trận như sau:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = F\tau \quad (5)$$

Từ (5), sau khi chuyển vế, ta được

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)FT_m - D^{-1}(q)C(q, \dot{q}) - D^{-1}(q)G(q) \quad (6)$$

Với việc xác định ngõ vào điều khiển là momen do động cơ tạo ra, việc mô phỏng chỉ dừng ở mức độ khảo sát khả năng bộ điều khiển LQR trong việc điều khiển hệ thống chứ chưa tạo được nền tảng để có thể áp dụng trên mô hình thực. Việc chuyển tín hiệu điều khiển từ momen sang điện áp giúp việc điều khiển trên mô hình thực từ tính toán mô phỏng sẽ khả thi hơn. Tuy trong nghiên cứu này, nhóm tác giả chưa thành công trong việc xây dựng pendubot 3-link thực tế nhưng việc mô phỏng vẫn sẽ được hướng phát triển theo hướng này. Phương trình quan hệ momen và điện áp V (Volt) [5] được trình bày như sau:

$$\tau = K_b V / R_a - K_b^2 \dot{q}_1 / R_a \quad (7)$$

Khi thay thế (7) vào (6), ta được hệ phương trình trạng thái hệ thống với ngõ vào điều khiển là điện áp cấp cho động cơ như sau

$$\ddot{q} = F(q, V) \quad (8)$$

$$\text{Với } F(q, V) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(q, V) \\ F_2(q, V) \\ F_3(q, V) \end{bmatrix}.$$

Việc liệt kê các hàm F1, F2, F3 được trình bày trong chương trình lưu ở Matlab, không thể hiện nổi trong khuôn khổ bài báo vì công thức rất dài dòng. Quá trình tính toán các hàm trên được trình bày theo các bước ở phía trên.

2.2. Giải thuật điều khiển

Với một hệ thống đã có phương trình toán học rõ ràng, đầy đủ thông số

hệ thống và điểm làm việc cụ thể, cố định, giải thuật điều khiển LQR là một phương pháp thông dụng. Với cấu trúc đơn giản, dễ tính toán (nhờ vào công cụ Matlab) và khả năng hiệu chỉnh đơn giản dựa vào ma trận trọng số, bộ điều khiển LQR thường được đề xuất cho điều khiển robot cân bằng.

Tuy nhiên, với hệ thống có dạng $\dot{x} = h(x, u)$ với x là biến trạng thái và u là tín hiệu điều khiển, bộ điều khiển LQR chỉ được thiết kế ổn định x về điểm cân bằng nếu điểm cân bằng là $x=[0]$ và $u=[0]$. Trong khi đó, vị trí cân bằng theo định nghĩa ở (8) lại là $q_1=\pi/2$ (chưa phải giá trị 0), $q_2=0$, $q_3=0$, vận tốc các link đều là 0 và $V=0$. Do vậy, ta cần đổi biến để điều kiện thiết kế LQR được thỏa. Các biến được đặt lại là

$$x_1 = q_1 - \pi/2; \quad x_2 = \dot{q}_1; \quad x_3 = q_1 + q_2 - \pi/2; \quad (9)$$

$$x_4 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2; \quad x_5 = q_2 + q_3 - \pi/2; \quad x_6 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3$$

Lúc này, (8) trở thành

$$\dot{x} = f(x, V) \quad (10)$$

Với

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_6]^T,$$

$$f(x, V) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, V) \\ f_2(x, V) \\ f_3(x, V) \end{bmatrix}.$$

Việc trình bày các hàm f_1, f_2, f_3 cũng rất dài và chỉ được thể hiện trong chương trình Matlab chứ không thể trình bày hết trong khuôn khổ bài báo.

Lúc này, ta có thể xấp xỉ hệ phương trình trạng thái phi tuyến ở (10) về dạng tuyến tính khi giả thiết hệ thống chỉ hoạt động rất sát quanh vị trí cân bằng được thể hiện ở (12).

$$x_0 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad u_0 = 0 \quad (11)$$

Lúc này, phương trình tuyến tính hệ thống khi hoạt động quanh điểm cân bằng là:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12}$$

Trong đó, ma trận A, B được thể hiện ở (14).

Ma trận Q, R là các ma trận trọng số được chọn có dạng sau

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_n \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_m \end{bmatrix} \tag{13}$$

Trong đó, Các giá trị Q_1 đến Q_n , R_1 đến R_m là các giá trị xác định dương. Các thành phần không phải đường chéo của ma trận Q, R đều bằng 0. m và n lần lượt là bậc của hệ phương trình trạng thái (số biến trạng thái của (12)) và số biến điều khiển của ma trận u. Ở đây, hệ pendubot 3-link là một hệ SIMO nên ma trận R chỉ gồm một phần tử dương duy nhất. Thành phần Q_i (với $i=1, 2, \dots, n$) là trọng số tương ứng với biến trạng thái x_i . Khi điều khiển, nếu ta quan tâm việc điều khiển biến trạng thái nào thì ta tăng trọng số tương ứng biến trạng thái đó lên so với trọng số các biến trạng thái khác (tương ứng việc giảm sự quan tâm đến việc điều khiển các biến trạng thái khác).

Trong bài báo này, việc khảo sát sự thay đổi thông số bộ điều khiển được bỏ qua mà tác giả chỉ quan tâm việc kiểm tra giải thuật điều khiển LQR có điều khiển được hệ thống và mức độ bền vững của bộ điều khiển trên với mô hình pendubot 3-link. Do đó, ma trận Q, R được chọn giá trị cơ bản là các ma trận đơn vị như ở (15). (Vì sự ổn định đã được đảm bảo theo phương trình Ricatti).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tag{14}$$

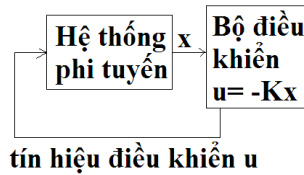
$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial V} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial V} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial V} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}^T$$

$$Q = eye(6); R = 1 \tag{15}$$

Luật điều khiển hồi tiếp LQR được tính có dạng như sau:

$$u = -Kx \tag{16}$$

Cấu trúc điều khiển LQR được thể hiện như Hình 2 dưới đây



Hình 2. Cấu trúc điều khiển LQR

Trong đó ma trận K được xác định thông qua việc chọn ma trận trọng số Q và R phù hợp, kết hợp với ma trận A, B (được tính từ ma trận rời rạc mô tả hệ tại vị trí cân bằng). Để tìm ma trận K, sử dụng lệnh sau trên phần mềm Matlab:

$$K = lqr(A, B, Q, R) \tag{17}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 149,7 & -0,17 & -95,57 & 0 & 8,63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -356,14 & 0,42 & 328,1 & 0 & -53,61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 283,45 & -0,33 & -418,41 & 0 & 160,91 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$B = [0 \ 2,6870 \ 0 \ -6,3925 \ 0 \ 5,0878]^T$$

Với thông số ở Bảng 1, tính toán được ma trận A, B ở (14) tại điểm cân bằng (11), ta được (18).

Để xét khả năng xây dựng một bộ điều khiển bất kì đối với hệ thống trên, ma trận điều khiển được tính dựa vào (18) như sau:

$$M_C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^5 B] \quad (19)$$

Dùng Matlab tính toán, ta có

$$\text{rank}(M_C) = 6 \quad (20)$$

Hạng của ma trận M_C bằng với bậc của hệ phương trình (12) (bằng với số biến trạng thái). Do đó, hệ thống là điều khiển được tại điểm làm việc. Đây là cơ sở cho việc xây dựng một bộ điều khiển bất kì cho hệ thống pendubot 3-link. Trong trường hợp này, bộ điều khiển được áp dụng là LQR.

Từ (15), (17), (18), ta có;

$$K = [111,4665 \quad 41,9074 \quad -133,9893 \dots \quad 32,3769 \quad 323,4086 \quad 33,3219] \quad (21)$$

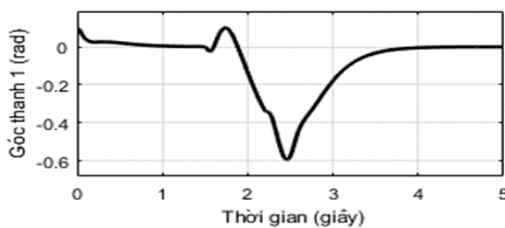
2.3. Kết quả mô phỏng

Với ma trận điều khiển K được tính toán như ở (21) và tín hiệu điện áp cấp cho mô hình được tính toán như ở (16), hệ thống được mô phỏng với hai trường hợp không có nhiễu và có nhiễu trong quá trình khởi động với thông số chọn ban đầu là

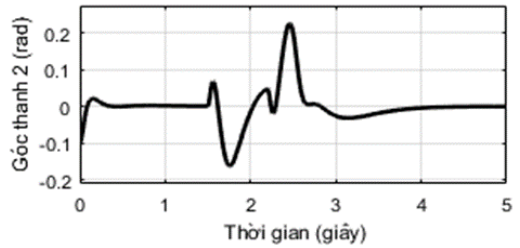
$$\begin{aligned} & [q_1(0) \quad \dot{q}_1(0) \quad q_2(0) \quad \dot{q}_2(0) \quad q_3(0) \quad \dot{q}_3(0)]^T \quad (22) \\ & = [0,1 \quad 0 \quad -0,1 \quad 0 \quad 0,01 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Các kết quả mô phỏng được thể hiện từ Hình 3 đến Hình 9:

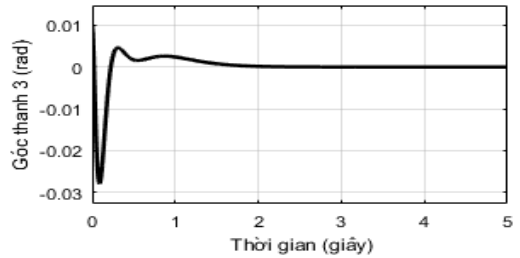
- Trường hợp không nhiễu



Hình 3. Góc link 1 không có nhiễu



Hình 4. Góc link 2 khi không có nhiễu

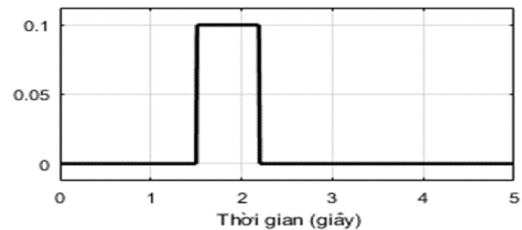


Hình 5. Góc link 3 khi không có nhiễu

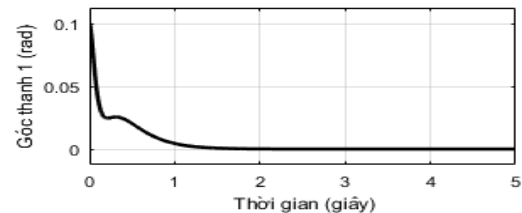
- Trường hợp có nhiễu

Hàm nhiễu được chọn là

$$y = \begin{cases} 0,1 & \text{if } 1,5 < u < 2,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$



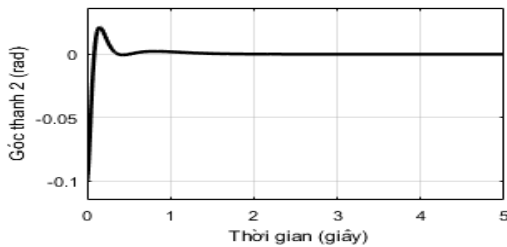
Hình 6. Đồ thị biểu diễn nhiễu tác động



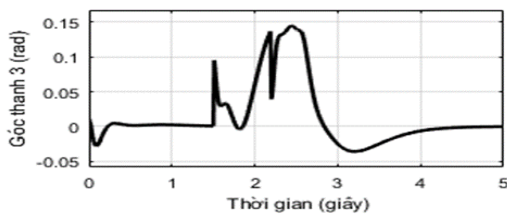
Hình 7. Góc link 1 khi có nhiễu tác động

Thông qua kết quả mô phỏng, ta thấy hệ pendubot 3-link- dưới sự điều khiển của giải thuật LQR- hoạt động khá ổn định với thời gian xác lập rất ngắn

trung bình 0.5 cho đến 1 giây ở trạng thái hoạt động không có nhiễu (Từ Hình 3 đến Hình 5). Đồng thời, góc dao động tối đa là 0.6 rad (34 độ) ở link 1, bớt dần dao động ở các link bậc cao hơn (lần lượt là 0.2 rad và 0.03 rad ở các link 2 và 3). Trong trường hợp có nhiễu, thời gian xác lập của hệ thống trở nên dài hơn (từ 1,5 đến 4 giây như ở Hình 7 và Hình 9) so với khi không có nhiễu. Tuy nhiên, hệ thống vẫn ổn định. Mặt khác, hệ thống có độ vọt lố không thay đổi so với khi không có nhiễu. Điều này cho thấy sự bền vững của bộ điều khiển LQR đối với hệ thống pendubot 3-link. Như vậy, bộ điều khiển LQR hoàn toàn có thể áp dụng được cho các hệ SIMO under-actuated bậc cao mà pendubot 3-link là một đối tượng tiêu biểu.



Hình 8. Góc link 2 khi có nhiễu tác động



Hình 9. Góc link 3 khi có nhiễu tác động

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra phương pháp và chứng minh thông qua mô phỏng. Tuy nhiên, một hướng đi mà các nghiên cứu sau này về đề tài điều khiển pendubot 3-link có thể là sử dụng các giải thuật tìm kiếm on-line hay off-line để tối ưu hóa ma trận Q, R. Từ đó, có được ma trận

điều khiển K tốt nhất, giúp các tiêu chuẩn chất lượng được cải thiện (thời gian xác lập, độ dao động của hệ thống khi quá độ...).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Mark W. Spong, Daniel J. Block.: “The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education”, Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995.
- [2]. Dong Sang Hoo: “Balancing control for the pendubot using sliding mode”, 44th International Symposium on Robotics (ISR), 2013.
- [3]. W. Wang, J. Yi, D. Zhao, D. Liu.: “Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems”, IEE Proceedings - Control Theory and Applications, Vol. 151, Issue 6, pp. 683 – 690, 2004.
- [4]. I. Fantoni, R. Lozano, M.W. Spong.: “Energy Based control of the Pendubot”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, Issue 4, pp. 725 – 729, 2000.
- [5]. Dinh-Dat Vu, Gia-Bao Hong, Minh-Tam Nguyen, Thanh-Nguyen Nguyen, Xuan-Dung Huynh: “Optimal Sliding Mode control for Tracking Trajectory Problem of Tripe Pendubot”, International Journal of Robotica & Management, pp. 9-12, Vol. 2, No. 23, Dec-2018.
- [6]. Kiam Heong Ang, G. Chong, Yun Li.: “PID control system analysis, design, and technology”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 13, Issue 4, pp. 559 – 576, 2005.

- [7]. Kiam Heong Ang, G. Chong, Yun Li.: “PID control system analysis, design, and technology”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 13, Issue 4, pp. 559 – 576, 2005.